JOINT INSTITUTE
交大密西根学院

UM-SJTU JOINT INSTITUTE

VP160 RC2 Math Part

Shao
Yujie

Contents

- Solve really easy Differential Equation

Solve Easy Differential Equation

【题 3】 一质点以初速度 v_0 作直线运动，所受阻力与其速度的三次方成正比．试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律．

Solution:

【解】 取质点运动所循的直线为 x 轴，取坐标原点 $x=0$ 为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置．由题设，质点的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^3$$

或

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^3}=-k\,\mathrm{d}t$$

积分，得

$$\frac{1}{2v^2}=kt+C,\quad \text{或}\quad \frac{1}{v^2}=2kt+C'$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad v=v_0$$

故积分常量

$$C'=\frac{1}{v_0^2}$$

代入上式，得

$$v(t)=v_0\left(\frac{1}{1+2kv_0^2t}\right)^{\frac{1}{2}}\tag{1}$$

因 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，故

$$\mathrm{d}x=v_0\left(\frac{1}{1+2kv_0^2t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

积分，得

$$x=\frac{1}{kv_0}\sqrt{1+2kv_0^2t}+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad x=0$$

故积分常量

$$C=-\frac{1}{kv_0}$$

代入上式，得

$$x(t)=\frac{1}{kv_0}\left(\sqrt{1+2kv_0^2t}-1\right)\tag{2}$$

由(1)、(2)式，消去 t，得

$$v(x)=\frac{v_0}{1+kv_0x}\tag{3}$$

又，因

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

及

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^3$$

故

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^3,\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\,\mathrm{d}x$$

积分，得

$$-\frac{1}{v}=-kx+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad v=v_0,\quad x=0$$

故积分常量

$$C=-\frac{1}{v_0}$$

代入上式，得

$$\frac{1}{v}=kx+\frac{1}{v_0}=\frac{1+kv_0x}{v_0}$$

或

$$v(x)=\frac{v_0}{1+kv_0x}$$

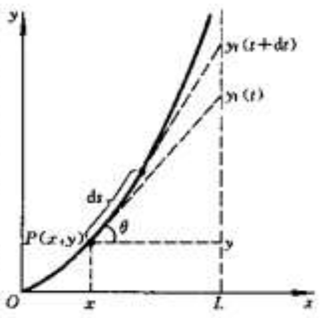
此即上述(3)式．

Solve Easy Differential Equation

【题 8】 飞行物自地面以匀速 v_f 向上空垂直飞行．在地面离飞行物起飞点相距 L 处发射一枚导弹，导弹与飞行物同时发射．导弹的速率 v 为常值，且 $v > v_f$，每一瞬时导弹均指向飞行物运动．

1. 试求导弹的飞行轨迹；
2. 试问导弹经多长时间击中飞行物．

该时刻导弹所在位置与导弹轨迹相切．设置坐标系，利用上述题给条件及几何关系便可建立确定导弹轨迹的微分方程，通过积分可得出导弹曲线运动的轨迹方程．导弹轨迹与飞行物轨迹的交点就是导弹击中飞行物的地点，它当然位于飞行物的轨迹上，求出交点（击中点）的高度，利用飞行物的运动学公式即可得出飞行物到达该点所需时间，这也就是导弹的飞行时间．



力图1-8-1

【解】 1. 设置平面直角坐标 Oxy 如图，取导弹发射点为坐标原点 O，则飞行物就从与原点相距 L 处垂直上飞，O 点和 L 点均在地面上．

在任意时刻 t，导弹位于 P 点，其坐标为 $x(t)$ 和 $y(t)$，飞行物的位置用 $y_f(t)$ 表示．t 时刻导弹与飞行物的连线与导弹轨迹在 P 点相切，即

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

式中 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 是 $\mathrm{d}s$ 在 x 轴和 y 轴的投影，$\mathrm{d}s$ 是导弹从 t 时刻到 $(t+\mathrm{d}t)$ 时刻行经的距离．

如图，有几何关系

$$y_f=y+(L-x)\tan\theta=y+(L-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

上式对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y_f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(L-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(L-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\qquad(1)$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内飞行物上升的高度为

$$\mathrm{d}y_f=v_f\,\mathrm{d}t$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内导弹飞行的距离为

$$\mathrm{d}S=v\mathrm{d}t$$

又

$$\mathrm{d}S-\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

将以上三式结合，得

$$\mathrm{d}y_f=v_f\,\mathrm{d}t=\frac{v_f}{v}\mathrm{d}S=\frac{v_f}{v}\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\frac{v_f}{v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y_f}{\mathrm{d}x}=\frac{v_f}{v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

代入（1）式，得

$$\frac{v_f}{v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=(L-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\qquad(2)$$

（2）式就是导弹轨迹所满足的微分方程，解此方程可以得出导弹的轨迹方程．为方便起见，令

$$\gamma=\frac{v_f}{v},\quad u=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

（2）式简化为

$$\gamma\sqrt{1+u^2}=(L-x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\gamma\mathrm{d}x}{L-x}$$

积分，得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\gamma\ln(L-x)+C$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad x=0,\quad u=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

代入上式，得出积分常量为

$$C=\gamma\ln L$$

故得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln\left(\frac{L}{L-x}\right)^\gamma$$

或

$$u+\sqrt{1+u^2}=\left(\frac{L}{L-x}\right)^\gamma$$

$$1+u^2=\left[\left(\frac{L}{L-x}\right)^\gamma-u\right]^2=\left(\frac{L}{L-x}\right)^{2\gamma}+u^2-2u\left(\frac{L}{L-x}\right)^\gamma$$

即

$$\left(\frac{L}{L-x}\right)^{2\gamma}-1=2u\left(\frac{L}{L-x}\right)^\gamma$$

解出

$$u=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L}{L-x}\right)^\gamma-\left(\frac{L-x}{L}\right)^\gamma\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L-x}{L}\right)^{-\gamma}-\left(\frac{L-x}{L}\right)^\gamma\right]$$

因

$$u=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

故得

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-\gamma}-\left(1-\frac{x}{L}\right)^\gamma\right]\mathrm{d}x$$

积分，得

$$y=\frac{L}{2}\left[\frac{1}{1+\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1+\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1-\gamma}\right]+C'$$

初条件为

$$t=0\text{ 时},\quad x=0,\quad y=0$$

故积分常量为

$$C'=-\frac{L}{2}\left(\frac{1}{1+\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\right)=\frac{\gamma L}{1-\gamma^2}$$

代入，得出导弹的轨迹方程为

$$y=\frac{L}{2}\left[\frac{1}{1+\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1+\gamma}-\frac{1}{1-\gamma}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{1-\gamma}\right]+\frac{\gamma L}{1-\gamma^2}$$

式中

$$\gamma=\frac{v_f}{v}$$

2. 导弹击中飞行物时，$x=L$，代入导弹的轨迹方程，得出击中时导弹（及飞行物）的高度为

$$y^*=\frac{\gamma}{1-\gamma^2}L$$

飞行物到达上述高度所需的时间为

$$t^*=\frac{y^*}{v_f}=\frac{\gamma L}{(1-\gamma^2)v_f}=\frac{L}{(1-\gamma^2)v}$$

此即导弹击中飞行物所需的飞行时间．

Thanks

From No Man's Sky